

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

9.1 דטרמיננטה

5 עובדות על דטרמיננטה

- דטרמיננטה מוגדרת רק עבור מטריצות ריבועיות $M \times M$
- למטריצה יכולה להיות רק דטרמיננטה אחת
- דטרמיננטה זה מספר
- דטרמיננטה של מטריצה לא הפיכה שווה ל-0 (אם עמודות או שורות של מטריצה ת"ל)
- מסמנים דטרמיננטה של מטריצה A ב- $|A|$ או בעזרת אות Δ

דטרמיננטה שימושים

- אפשר להיעזר בדטרמיננטה כדי לחשב מטריצה הופכית
- אפשר בעזרת דטרמיננטה להחליט האם מטריצה הפיכה
- אפשר בעזרת דטרמיננטה לחשב ערכים עצמיים של מטריצה
- אפשר בעזרת דטרמיננטה לחשב נפח של גוף
- ...

דטרמיננטה של מטריצה 2×2

• הגדרה:

$$\det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

דטרמיננטה של מטריצה 2×2

• דוגמאות:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-3 \times -4) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$$

דטרמיננטה של מטריצה 2×2

• דוגמאות:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-3 \times -4) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$$

מטריצה לא הפיכה

דטרמיננטה של מטריצה 2×2

• **משפט:** אם למטריצה 2×2 העמודות ת"ל הדטרמיננטה שווה ל-0:

$$\begin{bmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{bmatrix}$$

$$\Delta = ac\lambda - a\lambda c$$

$$= 0$$

דטרמיננטה של מטריצה 2×2

• תרגילים:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{f)} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 15$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{h)} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3$$

דטרמיננטה של מטריצה 2×2

• תרגילים:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3$

d) $\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 15$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -8$

h) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3$

a) Correct

b) Correct

c) No, $\Delta = -53$

d) No, $\Delta = 3$

e) Correct

f) No, $\Delta = 0$

g) No, $\Delta = -15$

h) Correct

דטרמיננטה ומטריצה מוחלפת

- משפט: $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

- הדגמה:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

פולינום אופייני – מטריצה 2×2

- נסתכל במטריצה 2×2 ודטרמיננטה שלה $ab - cd = \Delta$
- נניח אנו יודעים ערך של דטרמיננטה ולא יודעים אחד מערכי המטריצה

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 2\lambda - 28 = 4 \Rightarrow 2\lambda = 32 \Rightarrow \lambda = 16$$

פולינום אופייני – מטריצה 2×2

- נסתכל במטריצה 2×2 ודטרמיננטה שלה $ab - cd = \Delta$
- נניח אנו יודעים ערך של דטרמיננטה ולא יודעים שתי מערכי המטריצה

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \lambda^2 - 3 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

פולינום אופייני – מטריצה 2×2

- נסתכל במטריצה 2×2 ודטרמיננטה שלה $ab - cd = \Delta$
- נניח אנו יודעים ערך של דטרמיננטה ולא יודעים שתי מערכי המטריצה

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow (1 - \lambda)^2 - 9 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = -2, 4 \end{aligned}$$

פולינום אופייני – מטריצה 2×2

- נסתכל במטריצה 2×2 ודטרמיננטה שלה $ab - cd = \Delta$
- נניח אנו יודעים ערך של דטרמיננטה ולא יודעים שתי מערכי המטריצה

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -2, 4$$

$$\lambda = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

פולינום אופייני – מטריצה 2×2

- נסתכל במטריצה 2×2 ודטרמיננטה שלה $ab - cd = \Delta$
- נניח אנו יודעים ארך של דטרמיננטה ולא יודעים שתי מערכי המטריצה

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{I} \right) = 0$$

$$\det (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

$$\det (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

הגדרה: פולינום אופייני של מטריצה A

פולינום אופייני

- הגדרה: פולינום אופייני של מטריצה A :

$$\det (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

- פולינום מציג מטריצה בצורה של פולינום
- לפולינום יש תכונות מתמטיות שימושיות

תרגילים

• מצאו ערכים של λ שעבורם דטרמיננטה שווה ל-0

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \lambda \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 14 \\ \lambda & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 3 - \lambda & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3\lambda \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} \lambda & 18 \\ 1/2 & \lambda \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 5 - \lambda & -1/3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$

תרגילים

• מצאו ערכים של λ שעבורם דטרמיננטה שווה ל-0

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & \lambda \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 14 \\ \lambda & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 3 - \lambda & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3\lambda \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} \lambda & 18 \\ 1/2 & \lambda \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 5 - \lambda & -1/3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$

a) $\lambda = 8$

b) $\lambda = 0$

c) $\lambda = 1/4$

d) $\lambda = -7$

e) $\lambda = 5/9$

f) $\lambda = \pm 2$

g) $\lambda = \pm 3$

h) $\lambda = 6, 4$

דטרמיננטה של מטריצה 3x3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

• הגדרה:

דטרמיננטה של מטריצה 3×3

• ויזואליזציה:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
$$aei + bfg + cdh$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
$$- ceg - bdi - afh$$

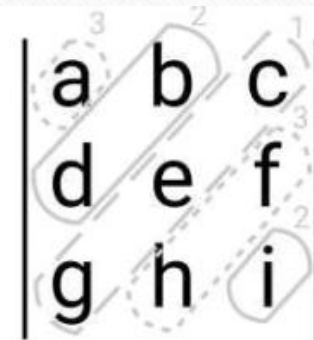
דטרמיננטה של מטריצה 3×3

• ויזואליזציה 2:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$



$aei + bfg + cdh$



$- ceg - bdi - afh$

דטרמיננטה של מטריצה 3×3

• דוגמה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 38 - 44 = -4$$

דטרמיננטה של מטריצה 3×3

• דוגמה:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 8 + 9 \cdot 6 \cdot 0 - 9 \cdot 0 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 24 + 18 = 42$$

דטרמיננטה של מטריצה 3×3

• דוגמה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 7 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 7 = 116 - 116 = 0$$

• שורות ת"ל $r_1 + r_2 = r_3$

תרגילים

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 8$$

תרגילים

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

d)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 8$$

a) No, $\Delta = -3$

b) No, $\Delta = +3$

c) Correct

d) No, $\Delta = 0$

תרגילים

מצאו ערכים של λ שעבורם דטרמיננטה שווה ל-0

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & \lambda & 4 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & -11 & 1 \\ 3 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ -4 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

תרגילים

מצאו ערכים של λ שעבורם דטרמיננטה שווה ל-0

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & \lambda & 4 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & -11 & 1 \\ 3 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ -4 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

a) any λ

c) $\lambda = 3$

b) $\lambda = 9$

d) $\lambda = 1, 3, 5$

דטרמיננטה של מטריצה 3x3 ו-T

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf$$

אלגוריתם רקורסיבי לחישוב דטרמיננטה

- נראה על ידי דוגמא איך מחשבים דטרמיננטה באופן כללי

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \overset{a \times}{\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}} - \overset{b \times}{\begin{vmatrix} e & & h \\ i & & l \\ m & & o & p \end{vmatrix}} + \overset{c \times}{\begin{vmatrix} e & f & \\ i & j & \\ m & n & p \end{vmatrix}} - \overset{\times d}{\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}}$$

אלגוריתם רקורסיבי לחישוב דטרמיננטה

- נראה על ידי דוגמא איך מחשבים דטרמיננטה באופן כללי

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg) \\ &= aei-afh - (bdi-dfg) + cdh-ceg \\ &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \end{aligned}$$

תרגילים

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) -10

b) 72

c) 0

דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית

- משפט: דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית שווה למכפלה איברי אלכסון ראשי

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - b0 = ad$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = aei + bf0 + c00 - ce0 - b0i - af0 = aei$$

דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית

- משפט: דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית שווה למכפלה איברי אלכסון ראשי

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & k & l \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = \overset{a \times}{\begin{vmatrix} f & g & h \\ 0 & k & l \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}} - \overset{b \times}{\begin{vmatrix} 0 & g & h \\ 0 & k & l \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}} + \overset{c \times}{\begin{vmatrix} 0 & f & h \\ 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}} - \overset{x \times d}{\begin{vmatrix} 0 & f & g \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

פייתון

```
import numpy as np  
A = np.random.randn(3,3)  
np.linalg.det(A)
```

החלפת בין שתי שורות ודטרמיננטה

• **משפט:** אם נחליף בין שתי שורות במטריצה אז דטרמיננטה שלה תשנה סימן

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1$$

החלפת בין שתי עמודות ודטרמיננטה

• **משפט:** אם נחליף בין שתי עמודות במטריצה אז דטרמיננטה שלה תשנה סימן

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - da = -(ad - cb)$$

החלפת בין שתי שורות ודטרמיננטה

- משפט: אם נחליף בין שתי שורות של מטריצה הדטרמיננטה תשנה סימן

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 0 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

החלפת בין שתי שורות ודטרמיננטה

• **משפט:** אם נחליף בין שתי שורות במטריצה אז דטרמיננטה שלה תשנה סימן

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = bdi + ceg + afh - bfg - aei - cdh$$

$$= -(aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

החלפת בין שתי שורות ודטרמיננטה

• **משפט:** הוספת שורה אחת מוכפלת בקבוע לשורה שנייה לא משנה דטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} = (a+c)d - (b+d)c$$

$$= ad + cd - (bc + dc)$$

$$= ad - bc$$

החלפת בין שתי שורות ודטרמיננטה

• **משפט:** הכפלת שורה (עמודה) בסקלר מכפלה את דטרמיננטה באותו סקלר

$$\begin{vmatrix} \beta a & \beta b \\ c & d \end{vmatrix} = \beta ad - \beta bc = \beta(ad - bc)$$

תכונות נוספות של דטרמיננטה

• משפט:

$$\det(\beta \mathbf{A}) = \beta^M \det(\mathbf{A}), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$$

$$\beta \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{vmatrix} = \beta a \beta d - \beta b \beta c = \beta^2 (ad - bc)$$

תכונות נוספות של דטרמיננטה

• משפט:

$$\det(\beta \mathbf{A}) = \beta^M \det(\mathbf{A}), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$$

$$\beta \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta a & \beta b & \beta c \\ \beta d & \beta e & \beta f \\ \beta g & \beta h & \beta i \end{vmatrix}$$

$$= \beta^3 aei + \beta^3 bfg + \beta^3 cdh - \beta^3 ceg - \beta^3 bdi - \beta^3 afh$$

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

9.2 ערכים ווקטורים עצמיים

ערכים ווקטורים עצמיים

- היום נדבר על פירוק של מטריצה
- הפרוק נגזיר רק עבור מטריצות ריבועיות
- המטרה של הפרוק היא לעבור ממטריצה A לשתי קבוצות: קבוצת ערכים עצמיים וקבוצת וקטורים עצמיים
- ערכים עצמיים – סקלרים, בדרך כלל, נסמן אותם ב- λ
- וקטורים עצמיים – וקטורים, בדרך כלל, נסמן אותם ב- v

ערכים ווקטורים עצמיים

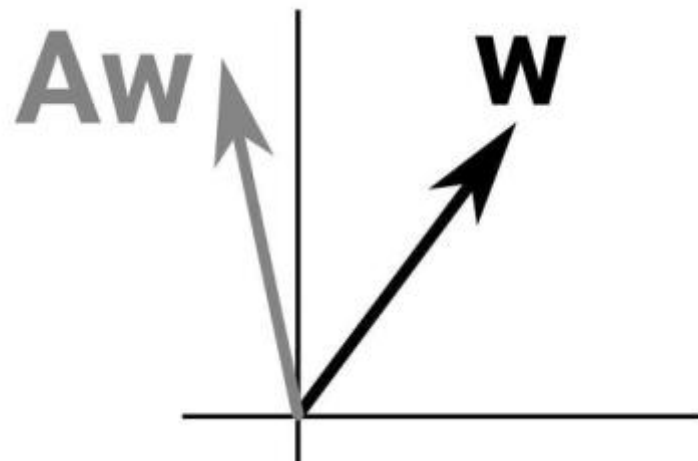
- עובדה: למטריצה $M \times M$ יש M ערכים עצמיים ו- M וקטורים עצמיים
- עובדה: לכל ערך עצמי מתאים וקטור עצמי
- עובדה: יכול להיות וקטור עצמי בעל ריבוי (לא נלמד בקורס)

$$M \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_m \\ \left[\begin{matrix} \mathbf{v}_1 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} \mathbf{v}_2 \end{matrix} \right] & \dots & \left[\begin{matrix} \mathbf{v}_m \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

M

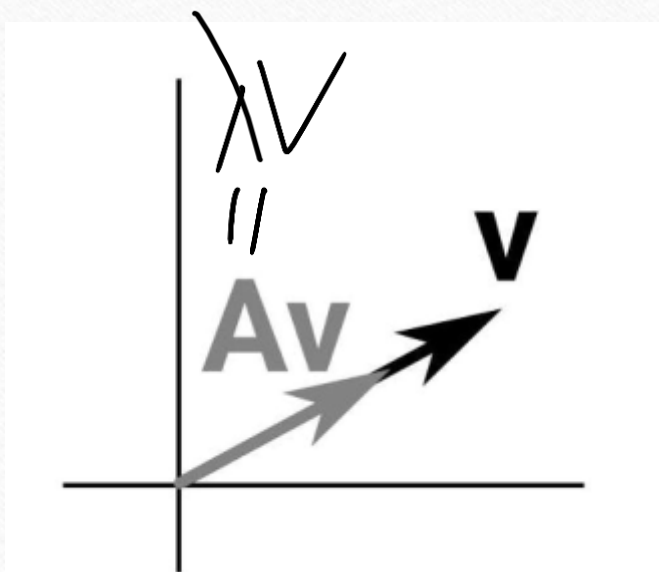
אינטואיציה גיאומטרית

- אפשר לחשוב על כפל מטריצה A בוקטור w כעל התמרה ליניארית $Aw=y$
- כאשר וקטור y מצביע לאיזשהו כיוון
- במילים אחרות אפשר להסתכל על התמרה המוגדרת בעזרת כפל ב- A כעל פעולת סיבוב



אינטואיציה גיאומטרית

- הגדרה: וקטור V שלא משנה כיוון שלא לאחר הכפלת ב- A נקרא וקטור עצמי של A
- כלומר, כפל V ב- A שקול בכפל A בסקלר λ



אינטואיציה גיאומטרית

- משוואה יסודית של ערך ווקטור עצמי:

$$Av = \lambda v$$

- וקטור V שמקיים את המשוואה נקרה ו"ע של A
- סקלר λ נקרא ע"ע של A שמתאים לו"ע V

וקטורים עצמים וערכים עצמים במדעי הנתונים

- משתמשים בו"ע וע"ע בתחומים רבים: בניתוח נתונים, הסקה סטטיסטית, עיבוד תמונה, ...

מציאת ע"ע

- כדי למצוא ע"ע נסתכל במשוואה היסודית

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- נעביר אגפים:

- כדי שנוכל להוציא גורם משותף V החוצה יש לשנות קצת את המשוואה:

$$A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

מציאת ע"ע

- כדי שנוכל להוציא גורם משותף V החוצה יש לשנות קצת את המשוואה:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- נתעלם מפתרון טריוויאלי $0=\mathbf{v}$

- כדי למצוא את ע"ע נפתור את המשוואה הבאה:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

ע"ע עבור מטריצה 2×2

- נתחיל ממטריצה כללית

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- נרשום משוואה אפיינית

$$\left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

- כלומר:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

דוגמא – מציאת ע"ע של מטריצה 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

דוגמא – מציאת ע"ע של מטריצה 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$$

תרגילים מציאת ע"ע

a) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

תרגילים מציאת ע"ע

a) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

Answers

a) $4, -4$

b) $\pm\sqrt{15}$

c) $3, 5$

d) $-3, 8$

ע"ע עבור מטריצה 3×3

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -8 \\ 15 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• נסתכל בדוגמה פרטית:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & 0 & -8 \\ 15 & 3 - \lambda & -15 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(9 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

ע"ע עבור מטריצה 3×3

• נסתכל בדוגמה פרטית:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ -4 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda) + 12 - 24 - 3(1 - \lambda) - 8\lambda + 12(2 + \lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 9 = 0$$

$$(3 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

תרגילים מציאת ע"ע

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

תרגילים מציאת ע"ע

a)
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) 1, 2, 3

b) 0, 1, 3

c) 4, 3, 3

קשר בין מימדים מטריצה ומספר ע"ע

- עבור מטריצה $M \times M$ נקבל פולינום אופייני מדרגה M , ולפי משפט יסודי של אלגברה יש לו M פתרונות – חלקם ממשיים, חלקם מרוכבים, חלק עם כפילויות

מציאת ו"ע

- כדאי למצא ו"ע שמתאים לע"ע מסוים אפשר לפתור משוואה הבאה:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

• נחזור לדוגמה קודמת:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

• נחזור לדוגמה קודמת:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3, & \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_2 = -1, & \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

- נחזור לדוגמה קודמת:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3, & \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, & \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = -1, & \mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T, & \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- יש אין סוף ו"ע עבור כל ע"ע, בדרך כלל, נבחר ו"ע בעל נורמה 1

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

- נחזור לדוגמה קודמת:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \lambda_1 = 3, & \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -1, & \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- יש אין סוף ו"ע עבור כל ע"ע, בדרך כלל, נבחר ו"ע בעל נורמה 1

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

תרגילים

- מצאו ו"ע וע"ע אין צורך לנרמל ו"ע

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

תרגילים

- מצאו ו"ע וע"ע אין צורך לנרמל ו"ע

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) $\lambda_1 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 7, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 4 & 3 - \lambda & 7 \\ 3 & 3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda)(6 - \lambda) + 42 + 36 - 9(3 - \lambda) - 8(6 - \lambda) - 21(1 - \lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 18 + 42 + 33 - 27 + 9\lambda - 48 + 8\lambda - 21 + 21\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 + 11\lambda = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 10\lambda - 11) = 0$$

$$-\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 11) = 0$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

$$\lambda_1 : \begin{bmatrix} 1-0 & 2 & 3 \\ 4 & 3-0 & 7 \\ 3 & 3 & 6-0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

$$\lambda_2 : \begin{bmatrix} 1-1 & 2 & 3 \\ 4 & 3-1 & 7 \\ 3 & 3 & 6-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

מציאת ו"ע – דוגמא

$$\mathbf{v}_3 : \begin{bmatrix} 1 - 11 & 2 & 3 \\ 4 & 3 - 11 & 7 \\ 3 & 3 & 6 - 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 7 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 41 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 3], [3, 2]])
L, V = np.linalg.eig(A)

L = np.diag(L)
```

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

9.3 על המבחן

חומר עזר

- 2 דפי A4 משתי צדדים + מחשבון. חשוב להסביר שלבי הפתרון
- במבחן יהיו שאלות עם סעיפים.
- במשך המבחן שעתיים
- כ-8-10 שאלות בכל שאלה מספר סעיפים
- סוגים של שאלות:
- שאלות חישוביות, שאלות הגדרה, שאלות נכון \ לא נכון, שאלות מסוג מתי משתמשים בכלי זה או בשיטה זו, שאלות מחשבה ושאלות בסגנון לשאלות מספר הקורס