

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.0 תזכורת

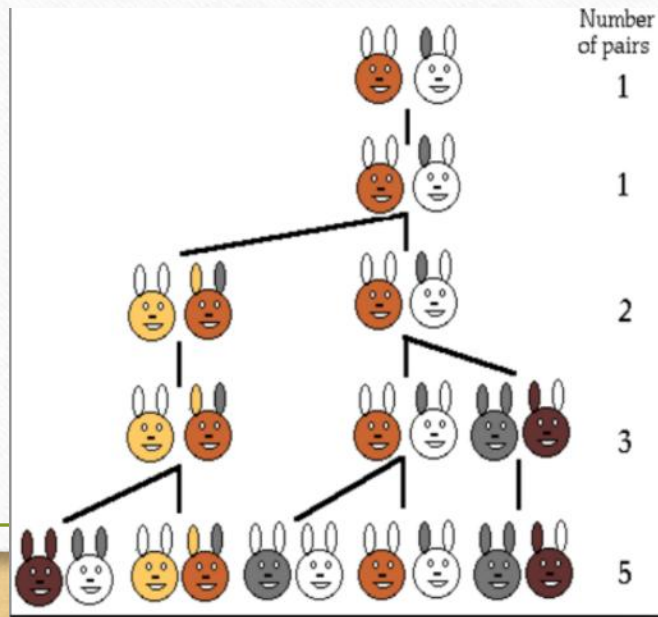
מוטיבציה

- אחד מהשימושים המעניינים של כפל מטריצה בוקטור הוא תיאור מערכות דינמיות שמשתנות לאורך הזמן:
- התפלגות אוכלוסייה במדינה לאורך השניים
- הרכב תיק השקעות המשתנה עם הזמן
- מספר אנשים חולים, מתים, מתים לאורך הזמן
-

דוגמא פשוטה: סדרת פיבונאצ'י

• סדרת פיבונאצ'י מתחילה כך:

- 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...



$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_3 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = 3 + 2 = 5$$

דוגמא פשוטה: סדרת פיבונאצ'י

• חישוב איברי הסדרה בעזרת כפל במטריצה:

• $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

מערכת דינמית ליניארית

- מערכת דינמית ליניארית היא מערת דינמית פשוטה שבה עבור כל $t: x_{t+1}$ הוא פונקציה ליניארית של x_t , כלומר

$$x_{t+1} = A_t x_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

- כאשר A_t היא מטריצת $n \times n$ המתארת דינמיקה של התהליך
- למשוואות קוראים בשם משוואות עדכון
- הערה: בהינתן A ו- x_t נוכל לחשב ערכים עתידים של התהליך $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots$

$$* \quad X_{t+1} = A X_t$$

מערכת דינמית ליניארית עם קלט

- קיים מספר גדול של מערכות דינמיות ליניאריות, למשל, מערכת דינמית ליניארית עם קלט אפשר להגדיר בצורה הבאה:

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + c_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

- u_t זה m -וקטור של קלטים בזמן t , B_t זאת מטריצה $n \times m$ – מטריצת הקלטים ו- c_t וקטור אופסט - offset

דינמיקה של אוכלוסייה

- מודל דינמי ליניארי יכול לעזור לתיאור התפלגות גלאי אוכלוסייה במדינה מסוימת
- נניח x_t 100-וקטור כאשר $(x_t)_i$ שווה למספר תושבים בגיל $i-1$ בראשון בינואר בשנה t במדינה נתונה
- אפשר לחשב x_{t+1} בעזרת משוואה הבאה: $x_{t+1} = Ax_t, \quad t = 1, 2, \dots,$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{98} & b_{99} & b_{100} \\ 1-d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-d_{98} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-d_{99} & 0 \end{bmatrix}$$

מודל של אפידמיה

- נסמן פרופורציית מספר אנשים באוכלוסייה בעזרת 4-וקטור
- לצורך דוגמא נניח:
- 5% של S ידבקו מחר, 1% של חולים ימות מחר, 10% של חולים יהיו בריאים עם חסינות לכל החיים, ו-4% של חולים יהיו מחר בריאים ללא חסינות
- אזי התפתחות של מודל אשפר להגדיר בעזרת מערכת הבאה:

$$\begin{pmatrix} X_S \\ X_i \\ X_R \\ X_p \end{pmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_S \\ X_i \\ X_R \\ X_p \end{pmatrix}_t$$

כפל מטריצות

- אם מספר עמודות במטריצה A שווה למספר שורות במטריצה B אפשר לחשב AB
- תהיו A ו- B מטריצות בעלות מימדים $m \times p$ ו- $p \times n$ בהתאם. אזי אפשר להכפיל A ב- B
- $C=AB$ התוצאה היא מטריצה C בעלת מימדים $m \times n$ ומתקיים:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + \dots + A_{ip}B_{pj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$C_{m,n} = A_{m,p} \cdot B_{p,n}$$

כפל מטריצות – הדגמה

• דוגמא:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}_C \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_B$$

Handwritten calculation showing the multiplication of three matrices: A (2x3), C (2x2), and B (3x2). The result is a 2x2 matrix. The intermediate result of A * C is shown as a 2x2 matrix with elements 28, 10, 6, and 7. The final result of (A * C) * B is shown as a 2x2 matrix with elements 39, 16, 22, and 10. The dimensions of the matrices are indicated by subscripts: A is 2x3, C is 2x2, and B is 3x2. The final result is 2x2.

מכפלה חיצונית של וקטורים

- מכפלה חיצונית של a m -וקטור ב b n -וקטור מוגדרת באופן הבא: ab^T

$$ab^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3,1} (2, 5)_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}_{3,2}$$

כפל במטריצת היחידה

• תהי A מטריצה $n \times n$ ו- I מטריצת היחידה אזי מתקיים:

- $AI=A$

- $IA=A$

The handwritten example illustrates the property $AI=A$ for a 2x2 matrix A . Matrix A is labeled with a purple bracket and contains the values 2, 5, 1, and 10. Matrix I is labeled with a purple bracket and contains the identity values 1, 0, 0, and 1. The calculation shows the first row of the product AI as $(2 \cdot 1 + 5 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1)$, which simplifies to $(2, 5)$. The second row is calculated as $(1 \cdot 1 + 10 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 10 \cdot 1)$, which simplifies to $(1, 10)$. The final result is the matrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, which is identical to matrix A .

$$\begin{matrix} & I \\ \begin{matrix} A \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 10 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

כפל מטריצות – סדר חשוב

• שימו לב, באופן כללי השוויון הבא לא מתקיים: ~~$AB = BA$~~

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 17 & 0 \end{bmatrix}$$

תכונות של כפל מטריצות

- קל להוכיח בעזרת הדגרה שכפל מטריצה במטריצה מקיים:

$$(AB)C = A(BC)$$

- הערה: למרות השוויון, סיבוכיות של חישוב יכולה להיות מאוד שונה עבור כל אחד מאגפים

- תכונות נוספות:

$$\gamma(AB) = (\gamma A)B$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

מטריצת גרם

GRAM MATRIX

$$G = A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \cdots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{bmatrix}$$

- תהי A מטריצה $m \times n$ אם עמודות $a_1, \dots, a_n$
- אזי מטריצה ריבועית $A^T A$ - נקראת מטריצת גרם

- G היא מטריצה סימטרית $G^T = (A^T A)^T = (A^T)(A^T)^T = A^T A = G$
- G הבנויה בעזרת מכפלות פנימיות של שורות ועמודות של A

סיבוכיות

- כדי לחשב איבר ij ב- AB צריך לחשב מכפלה פנימית $- 2p$ פעולות
- ולכן חישוב AB דורש $2mnp$ פעולות
- למשל כפל שתי מטריצות 1000×1000 יכול לדרוש כ- $2\,000\,000\,000$ פעולות

סיבוכיות – כפל מספר מטריצות

- כאשר מכפילים מספר מטריצות ABC אפשר לחשב את המכפלה בדרכים שונות:
- $(AB)C$
- $A(BC)$
- תאורטיות אמורים לקבל את אותה תוצאה
- אבל פרקטית סיבוכיות עבודה יכולה להיות מאוד שונה

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.1 הרכבה של פונקציות ליניאריות

פרק 10

הרכבה של פונקציות ליניאריות

• תהיו A מטריצה $m \times p$ ו- B מטריצה $p \times n$ נגדיר שתי פונקציות ליניאריות:

$$f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m \quad f(u) = Au$$

$$g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p \quad g(v) = Bv$$

• אזי הרכבה של f על g היא פונקציה h המקיימת:

$$h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h(x) = f(g(x)) = A(Bx) = (AB)x$$

• **מסקנה:** הרכבה של פונקציות ליניאריות גם פונקציה ליניארית

הרכבה של פונקציות ליניאריות

• תהיו A מטריצה $m \times p$ ו- B מטריצה $p \times n$ נגדיר שתי פונקציות ליניאריות:

$$f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m$$

$$f(u) = Au$$

$$g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$$

$$g(v) = Bv$$

$$h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$

$$h(x) = f(g(x)) = A(Bx) = (AB)x$$

• אזי הרכבה של f על g היא פונקציה h המקיימת:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

$f(g(x))$

הרכבה של פונקציות ליניאריות – דוגמא

• נסתכל ב-2 פונקציות ליניאריות הנתונות בעזרת מטריצות B, A

• $y=Bx, z=Ay$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(g(x)) = ABx = (-x_2, x_1) \quad g(f(x)) = BAx = (x_2, -x_1)$$

• $f(g(x))$ – משנה סימן של x_2 ומחליפה בין x_1 ל- x_2

• $g(f(x))$ – משנה סימן של x_1 ומחליפה בין x_1 ל- x_2

הרכבה של פונקציות ליניאריות – דוגמא

מטריצת הפרשים מסדר 2

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- תהי D_n מטריצת $(n-1) \times n$ הפרשים

- תהי D_{n-1} מטריצה $(n-2) \times n$ הפרשים

- אזי למכפלה שלכן $D_{n-1}D_n$ קוראים מטריצת הפרשים מסדר שני

$$D_n x = (x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$$

$$D_{n-1}D_n x = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 - 2x_3 + x_4, \dots, x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n)$$

הרכבה של פונקציות ליניאריות – דוגמא

מטריצת הפרשים מסדר 2

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

• תהי D_n מטריצת $(n-1) \times n$ הפרשים

• עבור $n=5$ נקבל: $\Delta = D_{n-1}D_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

הרכבה של פונקציות אפיניות

- באופן דומה ניתן להגדיר הרכבה של 2 פונקציות אפיניות

$$f : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^m$$

$$f(x) = Ax + b$$

$$g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{\hat{p}}$$

$$g(x) = Cx + d.$$

- אזי: $h(x) = f(g(x)) = A(Cx + d) + b = (AC)x + (Ad + b) = \tilde{A}x + \tilde{b}$

$$\tilde{A} = AC, \tilde{b} = Ad + b$$

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.2 חזקות של מטריצה

פרק 10

חזקות של מטריצה

- תהי A מטריצה ריבועית
- נסמן ב- A^2 תוצאת מכפלה A -ב- A
- ובאופן דומה נגדיר: $A^k A^l = A^{k+l}$
- כאשר: $A^0 = I$
- בקורס שלנו לא נדבר על חזקות שליליות או לא שלמות

חזקות של מטריצה

• בדקו:

$$I^K = I$$

$$(A^K)^L = A^{K \cdot L}$$

$$A^K A^L = A^{K+L}$$

דוגמאות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0.5 & 0.2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^2$$

Result

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & -0.6 \\ 2.8 & 3.65 & -1.9 \\ -7 & -3.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0.5 & 0.2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^{20}$$

$$\begin{pmatrix} 8.81893 \times 10^9 & 8.80667 \times 10^9 & -2.17564 \times 10^9 \\ 5.83641 \times 10^9 & 5.82829 \times 10^9 & -1.43985 \times 10^9 \\ -8.11616 \times 10^9 & -8.10487 \times 10^9 & 2.00226 \times 10^9 \end{pmatrix}$$

דוגמאות

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^2$$

Result

$$\begin{pmatrix} 0.22 & 0.16 & 0.62 \\ 0.14 & 0.2 & 0.66 \\ 0.18 & 0.16 & 0.66 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{20}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 0.180556 & 0.166667 & 0.652778 \\ 0.180556 & 0.166667 & 0.652778 \\ 0.180556 & 0.166667 & 0.652778 \end{pmatrix}$$

דוגמאות

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$$

Result

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$$

Result

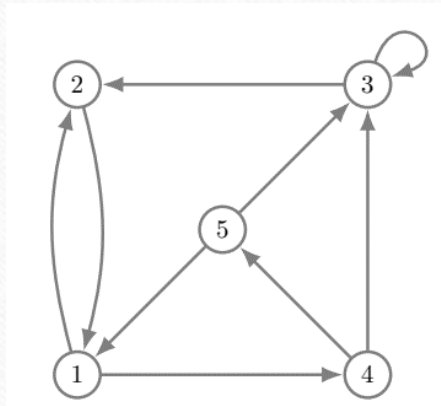
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^5$$

Result

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חזקות של מטריצה דוגמא – מסלולים בגרף מכוון



- תהי A מטריצת $n \times n$ שכנויות של גרף המוגדרת באופן הבא:

- אם יש קשת מ- j ל- i $A_{ij} = 1$
- אחרת $A_{ij} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} A_{kj}$$

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.3 פירוק QR

פרק 10

אלגוריתם גרם שמידט

- תהי A מטריצה $n \times k$ בעלת עמודות בלתי תלויות
- ז"א A מטריצה ריבועית או גבוהה
- אם נריץ על עמודות של A אלגוריתם GS נקבל k וקטורים אורתונורמליים $q_1, \dots, q_k$
- נגדיר מטריצת Q כעמודות $q_1, \dots, q_k$, מתקיים $Q^T Q = I$

אלגוריתם גרם שמידט

- כאשר משתמשים באלגוריתם GS נעזרים בנוסחה

$$\begin{aligned}a_i &= (q_1^T a_i)q_1 + \cdots + (q_{i-1}^T a_i)q_{i-1} + \|\tilde{q}_i\|q_i \\ &= R_{1i}q_1 + \cdots + R_{ii}q_i\end{aligned}$$

- כלומר $R_{ij} = q_i^T a_j$ עבור $i < j$ ו- $R_{ii} = \|\tilde{q}_i\|$ בנוסף נגדיר $R_{ij} = 0$ עבור $i > j$

- קיבלנו $QR=A$ – פירוק QR של מטריצה A , כאשר R מטריצה משולשת עליונה בעלת ערכים חיוביים על האלכסון הראשי
- יש הרבה שימושים בפירוק זה

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.4

פייתון

כפל מטריצות

```
1 import numpy as np
2
3 A = np.array([[ -1.5, 3, 2], [1, -1, 0]])
4 B = np.array([[ -1, -1], [0, -2], [1, 0]])
5 C = A @ B
6 print(C)
```

```
[[ 3.5 -4.5]
 [-1.   1. ]]
```

כפל מטריצות

```
1  import numpy as np
2
3  A = np.array([[-1.5, 3, 2], [1, -1, 0]])
4  B = np.array([[-1, -1], [0, -2], [1, 0]])
5  C = np.matmul(A, B)
6  print(C)
```

```
[[ 3.5 -4.5]
 [-1.   1. ]]
```

מטריצת גרם

```
1 import numpy as np
2
3 A = np.random.normal(size = (10,3))
4 G = A.T @ A
5 print(G)
```

```
[[ 8.59057042 -5.23412698 -3.61848843]
 [-5.23412698 12.74857586  0.9695091 ]
 [-3.61848843  0.9695091  5.04846329]]
```

$$G = A^T A$$

סיבוכיות חישוב כפל מטריצות בסדר שונה

```
1 import numpy as np
2 import time
3 m = 2000
4 n = 50
5 q = 2000
6 p = 2000
7 A = np.random.normal(size = (m,n))
8 B = np.random.normal(size = (n,p))
9 C = np.random.normal(size = (p,q))
10 start = time.time()
11 LHS = (A @ B) @ C
12 end = time.time()
13 print(end - start)
```

0.8191244602203369



```
1 import numpy as np
2 import time
3 m = 2000
4 n = 50
5 q = 2000
6 p = 2000
7 A = np.random.normal(size = (m,n))
8 B = np.random.normal(size = (n,p))
9 C = np.random.normal(size = (p,q))
10 start = time.time()
11 LHS = A @ ( B @ C)
12 end = time.time()
13 print(end - start)
```



0.04489707946777344

חזקה של מטריצה

```
1 import numpy as np
2 A = np.array([[0,1,0,0,1], [1,0,1,0,0], [0,0,1,1,1], [1,0,0,0,0], [0,0,0,1,0]])
3 np.linalg.matrix_power(A,2)

array([[1, 0, 1, 1, 0],
       [0, 1, 1, 1, 2],
       [1, 0, 1, 2, 1],
       [0, 1, 0, 0, 1],
       [1, 0, 0, 0, 0]])
```

פירוק QR

```
Q, R = np.linalg.qr(A)
```

```
def QR_factorization(A):  
    Q_transpose = np.array(gram_schmidt(A.T))  
    R = Q_transpose @ A  
    Q = Q_transpose.T  
    return Q, R  
Q, R = QR_factorization(A)
```

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.5

תרגילים

פתרו תרגילים הבאים

10.17 •

10.18 •

10.23 •

10.24 •

10.32 •

10.44 •

10.1 •

10.2 •

10.3 •

10.4 •

10.5 •

10.6 •

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.6 מטריצה הופכית

פרק 11

מוטיבציה

- כזכור הופכי כפלי למספר a הוא מספר x המקיים: $ax=xa=1$
- סימון: $x = a^{-1}$, ההופכי קיים בתנאי ש- a שונה מ-0
- היום ננסה להגדיר מושג דומה עבור מטריצות
- נצטרך להבדיל בין הופכי שמאלי להופכי ימיני

המטריצה ההופכית השמאלית

- תהיו X ו- A מטריצות
- אם מתקיים $XA=I$ אזי X נקראת המטריצה ההופכית השמאלית של A , A נקראת הפיכה משמאל
- הערה: אם מימדים של A הם $m \times n$ אזי מימדים של X הם $n \times m$

דוגמאות

- אם $A=[a]$ כאשר a – מספר ששונה מאפס, אזי ההופכי משמאל של A זה $[a^{-1}]$, ול- A יש רק הופכי משמאל אחד

דוגמאות

- כל n -וקטור a בעל ערכים שונים מאפס הוא הפיך משמאל, כאשר עבור כל $i=1,2,\dots,n$ כך ש: $x = (1/a_i)e_i^T$ מתקיים $xa=1$
- הערה: כאן יש לפחות n הופכים משמאל

$$\underbrace{\frac{1}{2}(0,1,0)}_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_a = 1$$

דוגמאות

- עבור מטריצה A הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- C, B הם ההופכיים משמאל של A

$$B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- הערה: מספר הופכים שמאליים יכון להיות אינסופי

דוגמאות

- עבור מטריצת היחידה I מתקיים $I * I = I$

דוגמאות

• עבור מטריצה A בעלת עמודות אורתונורמליות מתקיים: $A^T A = I$

• לכן A הפיכה משמאל ו- A^T הוא הופכי שמאלי ל- A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

הפיכות משמאל ועמודות בת"ל

- **משפט:** אם למטריצה A קיים הופכי משמאל C , אזי עמודות של A בת"ל

- **הוכחה:**

- כלומר הצירוף הליניארי היחיד של עמודות ששווה ל-0 הוא רק כאשר כל המקדמים שווים ל-0

- **הערה:** בהמשך נוכיח כיוון הופכי של המשפט

- **משפט:** עמודות של מטריצה בת"ל אם"ם קיים לה הופכי משמאל

- **מסקנה:** אם A הפיכה משמאל אזי היא ריבועית או גבוהה

$$\begin{aligned}0 &= Ax \\ C \cdot 0 &= C(Ax) \\ 0 &= (CA)x \\ 0 &= I \cdot x \\ 0 &= x\end{aligned}$$

פתרון מערכת משוואות ליניאריות בעזר מטריצה הופכית שמאלית

- תהי נתונה מערכת משוואות ליניאריות $b = Ax$ כאשר A – מטריצה $m \times n$, x – וקטור
- אם C זה הופכי משמאל ל- A נקבל:

$$Cb = C(Ax) = (CA)x = Ix = x$$

- כלומר, $x = Cb$ הוא פתרון של המערכת
- העמודות של A בת"ל ולכן הפתרון הוא יחיד
- כלומר, $x = Cb$ הוא הפתרון של המערכת!

דוגמא

• נסתכל במכרת הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

דוגמא

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

- נסתכל במכרת הבאה:

- ל- A יש שתי מטריצות הופכיות משמאל: C, B

$$B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- ולכן הפתרון הוא:

$$Bb = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Cb = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

מטריצה הופכית מימין

- תהיו X ו- A מטריצות

- אם מתקיים $AX=I$ אזי X נקראת המטריצה ההופכית מימין של A , A נקראת הפיכה מימין

- הערה: אם מימדים של A הם $m \times n$ אזי מימדים של X הם $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

מטריצה הופכית מימין ומטריצה הופכית משמאל: תכונות

• **טענה:** אם B היא הופכית מימין של A , אזי B^T היא הופכית משמאל של A^T

$$B^T A^T = (AB)^T = I \quad \text{הוכחה:}$$

• **טענה:** אם C היא הופכית משמאל של A , אזי C^T היא הופכית מימין של A^T

$$A^T C^T = (CA)^T = I \quad \text{הוכחה:}$$

• **מסקנה:** מטריצה הפיכה מימין אם"ם שורות שלה בת"ל

• **הערה:** למטריצה גבוהה אין הופכי מימין, רק מטריצות רחבות או ריבועיות יכולות להיות הפיכות מימין

פתרון מערכת משוואות ליניאריות בעזר מטריצה הופכית מימין

- תהי נתונה מערכת משוואות ליניאריות $Ax=b$ כאשר A – מטריצה $m \times n$, x – וקטור

- אם B – מטריצה הופכית מימין ל- A , אזי עבור x , המקיים $x = Bb$ מתקיים:

$$Ax = A(Bb) = (AB)b = Ib = b$$

- כלומר, אם A הפיכה מימין, אזי $x=Bb$ הוא פתרון של $Ax=b$,

- יכולים להיות שקיימים פתרונות נוספים

- **מסקרה:** אפשר להשתמש ב- B כדי למצוא איזשהו פתרון של מערכת המשוואות רחבה או ריבועית

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

דוגמא

$$Ax = b$$

• נסתכל במערכת הבאה:

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

• למערכת גבוהה (over-determined) יש פתרון יחיד $(1, -1)$ שאותו ניתן למצוא בעזרת מטריצה הופכית משמאל: אפשר להיעזר ב-B או ב-A

$$B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 16 \\ 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ דוגמא}$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

• נסתכל במערכת הבאה:

• למערכת גבוהה (over-determined) אין פתרון,

• כי $x = C(1, -1, 0) = (1/2, -1/2)$ לא מקיים $Ax = b$ – כאשר C מטריצה הופכית משמאל ל- A .

דוגמא

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_b$$

- נסתכל במערכת הבאה:

- למערכת רחבה (under=determined) יש מספר פתרונות עבור C, B הופכיות מימין

$$B^T(1, 2) = (1/3, 2/3, 38/9), \quad C^T(1, 2) = (0, 1/2, -1)$$

- הערה:** אפשר לפתור מערכת כזו (A הופכית מימין ומערכת רחבה) עבור כל וקטור b

מטריצות הופכיות של עבור מכפלת מטריצות

- תהיו D, A מטריצות במימדים מתאימים
- תהי B הופכית מימין ל- A , ו- E הופכית מימין ל- D , אזי EB הוא הופכית מימין ל- AD
- הוכחה:

$$(AD)(EB) = A(DE)B = A(IB) = AB = I$$

מטריצות הופכיות של עבור מכפלת מטריצות

- תהיו D, A מטריצות במימדים מתאימים לחישוב AD
- תהי C הופכית משמאל ל- A , ו- F הופכית משמאל ל- D , אזי FC הוא הופכית משמאל ל- AD
- הוכחה:

$$(FC)(AD) = F(CA)D = FD = I$$

מטריצה הופכית

- אם למטריצה A יש גם מטריצה הופכית מימין, וגם מטריצה הופכית משמאל, אזי המטריצות שוות ויש רק מטריצה אחת כזו, A חייבת להיות ריבועית

• הוכחה:

- נניח $AX=I$, $YA=I$ אזי:

$$X = (YA)X = Y(AX) = Y$$

- כלומר, כל מטריצה הופכית משמאל שווה לכל מטריצה הופכית מימין, ולכן מטריצה X היא יחידה

מטריצה הופכית

- אם למטריצה A יש גם מטריצה הופכית מימין וגם מטריצה הופכית משמאל, אזי המטריצות שוות ויש רק אחת כזו
- במקרה כזה נגיד ש- A מטריצה הפיכה (ניתנת להיפוך) ונסמך ההופכי היחיד של A ב- A^{-1}
- לפעמים למטריצה הפיכה קוראים בשם מטריצה לא סינגולרית

מטריצה הופכית מימדים

- מטריצה הפיכה תמיד ריבועית, כי למטריצות גבוהות אין מטריצה הופכית מימין, ולמטריצות רחבות אין מטריצה הופכית משמאל

- אם A^{-1} הוא הופכי של A אזי הופכי של A^{-1} הוא A

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

פתרון מערכת משוואות ליניאריות בעזרת מטריצה הופכית

- תהי נתונה מערכת של n משוואות ליניאריות $Ax=b$ אם A הפיכה, אזי עבור כל n -וקטור b מתקיים: $x = A^{-1}b$ - הפתרון של המערכת
- זה פתרון כי A^{-1} הוא הופכית מימין של A
- וזה הפתרון היחיד כי A^{-1} הופכית משמאל של A
- **משפט:** למערכת משוואות ליניארית של n משוואות ו- n נעלמים $Ax=b$ אם A הפיכה יש פתרון אחד ויחד $x = A^{-1}b$
- **מסקנה:** הפתרון הוא פונקציה ליניארית ב- b

תכונות של מטריצה הפיכה

• **משפט:** תהי A מטריצה ריבועית, אזי כל הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה
2. עמודות של A בת"ל
3. שורות של A בת"ל
4. ל- A יש הופכי מימין
5. ל- A יש הופכי משמאל

דוגמא: I

• I היא מטריצה הפיכה ומתקיים:

$$I^{-1} = I$$

$$II = I$$

דוגמא: מטריצה אלכסונית ריבועית

• **משפט:** תהי A מטריצה ריבועית אלכסונית, אזי מתקיים:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/A_{nn} \end{bmatrix}$$

• **הוכחה:**

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}/A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}/A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}/A_{nn} \end{bmatrix} = I.$$

• **בכתיב מקוצר נקבל:** $\text{diag}(A_{11}, \dots, A_{nn})^{-1} = \text{diag}(A_{11}^{-1}, \dots, A_{nn}^{-1})$

דוגמא: מטריצה אורתוגונלית

- אם Q מטריצה אורתוגונלית, אזי $Q^T Q = I$, כלומר $Q^{-1} = Q^T$

דוגמא: מטריצה 2×2

- מטריצה A 2×2 הפיכה אם"ם $A_{11}A_{22} \neq A_{12}A_{21}$

- ומתקיים:

$$A^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

- הערה: אפשר לזכור את הנוסחה

- הערה: עבור מטריצות יותר גדולות הנוסחאות לחישוב מטריצה הופכית קיימות, אבל הן מסורבלות אין צורך לזכור אותם

דוגמא: לא טריוויאלית

- תהי A מטריצה הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

- אזי A הפיכה ומתקיים:

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & -20 & -10 \\ -6 & 5 & -2 \\ 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

- בדקו כי: $AA^{-1} = I$

מטריצה הופכית – תכונות

- אפשר להוכיח את התכונות הבאות:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- נסמן $(A^{-1})^k$ כ- A^{-k}

- ואז עבור כל k, l שלמים מתקיים

$$A^0 = I$$

$$A^k A^l = A^{k+l}$$

מטריצה משולשת

- **משפט:** תהי L מטריצה משולשת תחתונה בעלת ערכי האלכסון הראשי שונים מאפס, אזי L הפיכה
- **הוכחה:** נסתכל במערכת $Lx=0$ אפשר לרשום את המערכת בצורה הבאה:

$$\begin{array}{rcl} L_{11}x_1 & = & 0 \\ L_{21}x_1 + L_{22}x_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ L_{n1}x_1 + L_{n2}x_2 + \cdots + L_{n,n-1}x_{n-1} + L_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

- ממשוואה ראשונה נסיק $x_1=0$, ואז ממשוואה שניה נסיק $x_2=0$ וכך נמשיך ולכן עמודות של L בת"ל ולכן היא הפיכה (באופן דומה אפשר להראות את המשפט עבור מטריצה משולשת עליונה)

מטריצה משולשת

- **משפט:** תהי R מטריצה משולשת עליונה בעלת ערכי האלכסון הראשי שונים מאפס
- אזי R הפיכה
- **הוכחה:** דומה להוכחה משקף קודם

חישוב מטריצה הופכית בעזרת פירוק QR

- **עובדה:** בעזרת פירוק QR קל למצוא מטריצה הופכית
- תהי A מטריצה ריבועית הפיכה, כלומר עמודות שלה בת"ל נבצע פירוק ונקבל $A=QR$
- כאשר Q מטריצה אורתוגונלית ו- R מטריצה משולשת עליונה בעלת ערכים חיוביים על האלכסון הראשי
- Q ו- R הפיכות ולכן נקבל:
- בהמשך נראה איך לחשב R^{-1}

$$A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = R^{-1}Q^T$$

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.7 פתרון מערכת משוואות ליניאריות, חישוב מטריצה
הופכית

פרק 11

הצבה לאחור

back substitution

- תהי R מטריצה משולשת עליונה בעלת ערכים שונים מאפס על אלכסון הראשי
- נסתכל במערכת משוואות $Rx=b$ אפשר לרשום אותה בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + \cdots + R_{1,n-1}x_{n-1} + R_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ R_{n-1,n-1}x_{n-1} + R_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ R_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- איך נפתור אותה?
- מהסוף להתחלה – הצבה לאחור

הצבה לאחור

back substitution

$$\begin{aligned} R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + \cdots + R_{1,n-1}x_{n-1} + R_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ R_{n-1,n-1}x_{n-1} + R_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ R_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$x_n = b_n / R_{nn} \quad \bullet \text{ נמצא}$$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - R_{n-1,n}x_n) / R_{n-1,n-1} \quad \bullet \text{ ממשוואה שניה מהסוף נקבל}$$

• וכך נמשיך

הצבה לאחור

back substitution

- תהליך הצבה לאחור פותר מערכת משוואות $Rx=b$ בעזרת הצבה לאחור

- הפתרון הוא: $x = R^{-1}b$

- סיבוכיות:

- צעד 1: חלוקה 1

- צעד 2: 3 פעולות

- צעד i : $2i-1$ פעולות

- סה"כ $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$

פתרון מערכת משוואות כללית הפיכה A

• תהי A הפיכה, אנו רוצים לפתור $Ax=b$, כלומר למצוא x המקיים: $x = A^{-1}b$

• בעזרת פירוק QR: $A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^T$

$$x = A^{-1}b = R^{-1}Q^T b$$

SOLVING LINEAR EQUATIONS VIA QR FACTORIZATION

given an $n \times n$ invertible matrix A and an n -vector b .

1. *QR factorization.* Compute the QR factorization $A = QR$.
2. Compute $Q^T b$.
3. *Back substitution.* Solve the triangular equation $Rx = Q^T b$ using back substitution.

$$\begin{matrix} 2n^3 \\ 2n^2 \end{matrix}$$

$$n^2 / (2n^3)$$

חישוב מטריצה הופכית

- תהי A מטריצה הפיכה

- נראה אלגוריתם למציאת $B = A^{-1}$

1. *QR factorization.* Compute the QR factorization $A = QR$.
2. For $i = 1, \dots, n$,
Solve the triangular equation $Rb_i = \tilde{q}_i$ using back substitution.

$2n^3$
 n^3

$O(3n^3)$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= R^{-1}Q^T \\ RA^{-1} &= RR^{-1}Q^T \\ RB &= Q^T \end{aligned}$$

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.8 תרגילים

פתרו

11.2 •

11.3 •

11.5 •

אלגברה ליניארית למדעי הנתונים

8.9 פייתון

הופכי שמאלי

```
1 import numpy as np
2 A = np.array([[ -3, -4], [4, 6], [1, 1]])
3 B = np.array([[ -11, -10, 16], [7, 8, -11]])/9 #left inverse of A
4 C = np.array([[0, -1, 6], [0, 1, -4]])/2 #Another left inverse of A
5 #Let's check
6 print(B @ A)
7 print(C @ A)
8
```

```
[[ 1.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [-4.4408921e-16  1.00000000e+00]]
[[1. 0.]
 [0. 1.]]
```

מטריצה הופכית

```
1 import numpy as np
2 A = np.array([[1,-2,3], [0,2,2], [-4,-4, -4]])
3 B = np.linalg.inv(A)
4 B
5
6
```

```
array([[ -2.77555756e-17,  -5.00000000e-01,  -2.50000000e-01],
       [ -2.00000000e-01,   2.00000000e-01,  -5.00000000e-02],
       [  2.00000000e-01,   3.00000000e-01,   5.00000000e-02]])
```

מטריצה הופכית

```
1 import numpy as np
2 A = np.array([[1,-2,3], [0,2,2], [-4,-4, -4]])
3 B = np.linalg.inv(A)
4
5 print(B @ A)
6 print(A @ B)
7
```

```
[1.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
[0.00000000e+00  1.00000000e+00  2.77555756e-17]
[0.00000000e+00  5.55111512e-17  1.00000000e+00]
[ 1.00000000e+00  1.11022302e-16 -1.38777878e-17]
[ 5.55111512e-17  1.00000000e+00  1.38777878e-17]
[ 0.00000000e+00 -2.22044605e-16  1.00000000e+00]
```

```

1  import numpy as np
2  ✓ def back_subst(R,b_tilde):
3      n = R.shape[0]
4      x = np.zeros(n)
5  ✓  for i in reversed(range(n)):
6      |   x[i] = b_tilde[i]
7  ✓  |   for j in range(i+1,n):
8      |       x[i] = x[i] - R[i,j]*x[j]
9  ⚡  |   x[i] = x[i]/R[i,i]
10     return x
11  R = np.triu(np.random.random((4,4)))
12  b = np.random.random(4)
13  x = back_subst(R,b)
14  np.linalg.norm(R @ x - b)
15
16
17

```

1.1102230246251565e-16

הצבה לאחור

פתרון מערכת משוואות ליניאריות

```
def solve_via_backsub(A,b):  
    Q,R = QR_factorization(A)  
    b_tilde = Q.T @ b  
    x = back_subst(R,b_tilde)  
    return x
```

```
x1 = np.linalg.solve(A,b)
```

```
x2 = np.linalg.inv(A) @ b
```